ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

В.Н.Байер, В.А.Хозе

излучение при двухчастичной аннигиляции электрон-позитронной пары

НОВОСИБИРСК 1965

А Н Н О Т А Ц И Я

С помощью способа, предложенного ранее авторами, вычислено интегральное сечение излучения фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару скалярных частиц. Проведен анализ сечения излучения фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару любых частиц с учетом формфакторов. При этом сечение излучения электронами вычислено точно, а в сечении излучения конечными частицами вычислены два первых члена разложения по степеням ω/ε, причем для вычисления второго члена разложения использован метод Лоу. Во всех рассмотренных сечениях интерференционный член обращается в нуль.

V.N.BAYER,V.A.KHOSE

PHOTON EMISSION IN TWO PARTICLE ANNIGILATION OF ELECTRON-POSITRON PAIR

Abstract

Using a method,recently proposed by authors,the photon emission cross-section in electron-positron annigilation into pair of scalar particles is calculated.An analysis of photon emission cross-section in electron-positron annigilation into arbitrary pair of particles is made,taking into account form-factors.In this case cross-section of photon emission by electrons is calculated exactly and in cross-secton of final particle emission two initial terms of expansion in powers of $\frac{\omega}{m}$ is found;in calculation of second term Low method is used.In all these cross-sections the interference term is vanished.

§ I. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [I] авторы предложили простой способ вычисления интегрального сечения излучения фотона с произвольной энергией при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару других частиц. Идея способа состоит в интегрировании отдельных частей диаграмм с широким использованием свойств релятивистской, калибровочной и зарядовой инвариантности. С помощью этого способа было вычислено интегральное сечение излучения фотона при рождении пары мюонов в электрон-позитронном столкновении.

В данной работе вычисляются сечения излучения фотона в ряде аннигиляционных процессов. Рассмотрен процесс излучения при образовании пары скалярных частиц при аннигиляции электрон-позитронной пары (§ 2 статьи). Для учета влияния сильных взаимодействий на процесс излучения начальными частицами достаточно просто ввести формфакторы конечных частиц. При этом, если по спинам конечных частиц проводится суммирование, то вследствие релятивистской, зарядовой и калибровочной инвариантностей оказывается возможным [2] записать универсальную формулу для интегрального сечения излучения начальными частицами, в которую входят две функции, зависящие от формфакторов (§ 3 статьи). Для учета влияния сильных взаимодействий на процесс излучения конечными частицами необходимо знать вклады диаграмм комптоновского типа (две линии конечных частиц и две фотонных, из которых одна виртуальная). Для этого можно ввести либо феноменологические формфакторы четырехвостки либо использовать динамические модели, либо , наконец, разложить амплитуду четырехвостки по степеням ω/E . Об указанных формфакторах для четырехвостки в настоящее время ничего не известно, а рассмотрение, например в рамках дисперсионного подхода, является весьма сложной самостоятельной задачей и ниже не проводится. В то же время довольно много информации можно получить с помощью разложения амплитуды излучения фотона конечными частицами по степеням ω/E . Оказывается, что нулевой член разложения дается приближением классических токов, для которого мы можем также выписать универсальную формулу. Для получения следующего члена разложения использовался метод Лоу [3] , причем само разложение проделано на примере излучения при рождении пары пионов (§ 4 статьи). Аналогично оно может быть проделано и для излучения при рождении любых других пар частиц.

§ 2. Сечение излучения при рождении пары скалярных частиц

Процесс излучения фотона при рождении пары скалярных частиц в электрон-позитронном столкновении представляется 5 диаграммами (рис.I). Матричный элемент процесса имеет вид:[x)]

$$M = A\left[\frac{1}{\Delta^2}\bar{v}(p_2^+)L_1^{\nu}u(p_1)\mathcal{P}_\nu + \frac{1}{\Lambda^2}\bar{v}(p_2^+)\gamma^{\nu}u(p_1)S_\nu\right] \tag{2.I}$$

где

$$A = \frac{ie^3}{(2\pi)^{3/2}}\frac{m}{\sqrt{8E_1E_2E_3E_4}}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{P} = p_4 - p_3^+, \quad \Delta = p_4 + p_3^+, \quad \Lambda = p_1 + p_2^+$$

$$S_\nu = -\left(\frac{(ep_4)}{\varkappa'} + \frac{(ep_3)}{\varkappa}\right)\mathcal{P}_\nu + \left(\frac{(ep_4)}{\varkappa'} - \frac{(ep_3)}{\varkappa}\right)k_\nu - 2e_\nu \tag{2.3}$$

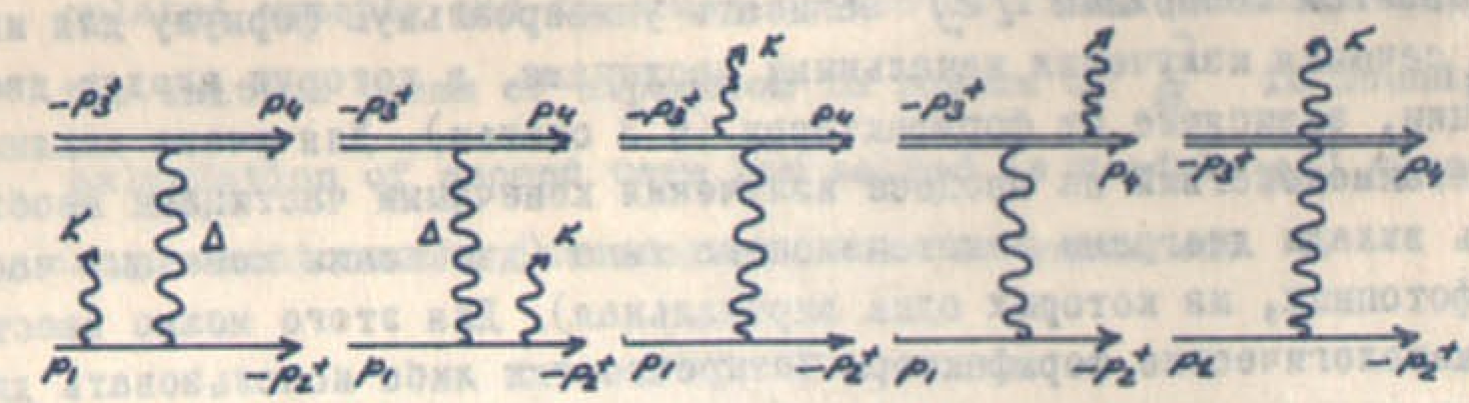

рис.1

После усреднения по спинам электронов и суммирования по поляризациям фотонов получаем:

$$\bar{S}_i S_f |M|^2 = \frac{|A|^2}{4}\left[\frac{1}{\Delta^4}\frac{M_e^{\nu\nu'}}{m^2}\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_{\nu'} + \frac{1}{\Lambda^4}\frac{J_e^{\nu\nu'}}{m^2}T_{\nu\nu'} + \overline{\frac{2}{\Lambda^2\Delta^2}\frac{K_1^{\nu\nu'}}{m^2}\mathcal{P}_\nu S_{\nu'}}\right] \tag{2.4}$$

x) Здесь и ниже мы используем те же обозначения, что и в статье [I].

Здесь

$$T_{\nu\nu'} = -\sum_{\substack{пол.\\фот.}} S_\nu S_{\nu'} = 4g_{\nu\nu'} + \xi^2\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_{\nu'} + \eta^2 k_\nu k_{\nu'} + (\xi\eta)(\mathcal{P}_\nu k_{\nu'} + \mathcal{P}_{\nu'}k_\nu) - 2(\xi_\nu\mathcal{P}_{\nu'} + \xi_{\nu'}\mathcal{P}_\nu + \eta_\nu k_{\nu'} + \eta_{\nu'}k_\nu) \tag{2.5}$$

$$\xi_\nu = \frac{p_{4\nu}}{\varkappa'} + \frac{p_{3\nu}^+}{\varkappa}, \quad \eta_\nu = \frac{p_{4\nu}}{\varkappa'} - \frac{p_{3\nu}^+}{\varkappa} \tag{2.6}$$

Сечение исследуемого процесса как прежде удобно записать в виде:

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_s + d\sigma_{es} \tag{2.7}$$

$d\sigma_e$ - вклад, в котором фотон излучается начальными частицами,

$d\sigma_s$ - вклад, в котором фотон излучается конечными частицами,

$d\sigma_{es}$ - интерференционный член.

Рассмотрим сечение

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{(2\pi)^2/F/}\int\frac{d^3k}{\omega}M_e^{\nu\nu'}V_{\nu\nu'} \tag{2.8}$$

где

$$V_{\nu\nu'} = \frac{1}{4\Delta^4}\int\frac{d^3p_3}{E_3}\frac{d^3p_4}{E_4}\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_{\nu'}\delta(\Delta - p_3^+ - p_4) = -\frac{\pi}{6\Delta^2}\left(\frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2}\right)^{3/2}\left[g_{\nu\nu'} - \frac{\Delta_\nu\Delta_{\nu'}}{\Delta^2}\right] \tag{2.9}$$

Вследствие градиентной инвариантности $M_e^{\nu\nu'}$ вклад в (2.8) даёт только свёртка с тензором $g_{\nu\nu'}$. Выполняя эту свёртку и проводя тривиальное интегрирование по азимутальному углу вылета фотона, получаем дифференциальное сечение по углу между направлениями начального электрона и фотона в Ц-системе начальных частиц

$$\frac{d^2\sigma_e(E,\omega,\vartheta_k)}{d(\cos\vartheta_k)\,d\omega} = \frac{\alpha^3\omega}{24E^2\beta\Delta^2}\left(\frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2}\right)^{3/2}Z \tag{2.10}$$

$$Z = m^2(\Delta^2 + 2m^2)\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u'^2}\right) + 2m^2\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u}\right) + 2\left(\frac{u}{u'} + \frac{u'}{u}\right) + \frac{4}{uu'}\left[E^2\Delta^2 + m^2(E\omega - m^2)\right] \tag{2.II}$$

Проинтегрировав по углу ϑ_k , получаем:

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{6E^2\beta}\frac{d\omega}{\omega}\frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}\right)^{3/2} Y \tag{2.12}$$

$$Y = (L-1)(\Delta^2+2\omega^2) + m^2\left[L\left(\frac{2\omega}{E}-\frac{m^2}{E^2}\right)-2\right] \tag{2.13}$$

Здесь

$$L = \frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\,,\quad \beta = \frac{\sqrt{E^2-m^2}}{E} \tag{2.14}$$

Приступим теперь к вычислению сечения $d\sigma_s$

$$d\sigma_s = \frac{\alpha^3}{4(2\pi)^2|F|}\int\frac{d^3k}{\omega\Lambda^4}J_e^{\nu\nu'}W_{\nu\nu'} \tag{2.15}$$

где

$$W_{\nu\nu'} = \int\frac{d^3p_3}{E_3}\frac{d^3p_4}{E_4}T_{\nu\nu'}\delta\left(\Lambda-p_3^+-p_4-k\right) \tag{2.16}$$

Если учесть, что тензор $T_{\nu\nu'}$ удовлетворяет условию:

$$\Lambda^\nu T_{\nu\nu'} = \Lambda^{\nu'}T_{\nu\nu'} = 0 \tag{2.17}$$

то общее выражение для $W_{\nu\nu'}$ может быть представлено в виде:

$$W_{\nu\nu'} = h_1 g_{\nu\nu'} + \frac{\Lambda^2}{(k\Lambda)^2}\left(h_1+\Lambda^2h_2\right)k_\nu k_{\nu'} + h_2\Lambda_\nu\Lambda_{\nu'} - \frac{(h_1+\Lambda^2h_2)}{(k\Lambda)}\left(k_\nu\Lambda_{\nu'}+k_{\nu'}\Lambda_\nu\right) \tag{2.18}$$

Для вычисления функций h_1, h_2 достаточно свернуть тензор $W_{\nu\nu'}$ с тензорами $g^{\nu\nu'}$, $k^\nu k^{\nu'}$ и вычислить интегралы, получающиеся из (2.16): Это проще всего сделать в Ц-системе двух конечных частиц. В Ц-системе начальных частиц имеем:

$$2h_1 - \Lambda^2h_2 = \frac{4\pi}{E^2\omega^2}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\left\{(E^2-\mu^2)\left[(\Delta^2-2\mu^2)L_1-\Delta^2\right]+4E^2\omega^2\right\} \tag{2.19}$$

$$h_2 = \frac{\pi}{E^2\omega^2}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\left[3\Delta^2-L_1(\Delta^2+2\mu^2)\right]$$

где

$$L_1 = \frac{1}{\beta_0}\ln\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\,,\quad \beta_0 = \sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}} \tag{2.20}$$

Подставляя полученные величины в формулу (2.15) легко получить дифференциальное сечение по углу между направлениями начального электрона и фотона для вклада скалярных частиц.

$$\frac{d^2\sigma_s(E,\omega,\vartheta_k)}{d(\cos\vartheta_k)\,d\omega} = -\frac{\alpha^3\omega}{64\pi E^4\beta}\left[h_1\left(1+\frac{m^2}{2E^2}\right)+\frac{mm'}{2E^2\omega^2}\left(h_1+\Lambda^2h_2\right)\right] \tag{2.21}$$

Интегрируя (2.21) по углу вылета фотона получаем:

$$d\sigma_s = \frac{\alpha^3}{24E^4\beta}\frac{d\omega}{\omega}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\left(1+\frac{m^2}{2E^2}\right)\left\{\left[(\Delta^2-2\mu^2)L_1-\Delta^2\right]\left(1-\frac{\mu^2}{E^2}\right)+4\omega^2\right\} \tag{2.22}$$

При вычислении вклада интерференционного члена возникает интеграл:

$$O_{\nu\nu'} = \int\frac{d^3p_3}{E_3}\frac{d^3p_4}{E_4}\delta\left(\Lambda-p_3^+-p_4-k\right)S_\nu P_{\nu'} \tag{2.23}$$

При замене $p_3^+\leftrightarrow p_4$ подинтегральное выражение меняет знак, так что

$$O_{\nu\nu'} = 0 \tag{2.24}$$

Видно, что вклад интерференционного члена в случае рождения пары скалярных частиц, как и в случае рождения пары мюонов [1] , обращается в нуль. Таким образом суммарное дифференциальное сечение есть

$$\frac{d^2\sigma}{d(\cos\vartheta_k)d\omega} = \frac{d^2\sigma_e}{d(\cos\vartheta_k)d\omega} + \frac{d^2\sigma_s}{d(\cos\vartheta_k)d\omega} \tag{2.25}$$

и даётся формулами (2.10) и (2.21)

Суммарное интегральное сечение есть

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_s \tag{2.26}$$

и даётся формулами (2.12) и (2.22).

Существует еще простой способ получения формулы (2.22), при котором интегрирование проводится сразу по всем импульсам конечных частиц (при фиксированном " ω "). Этот способ приведён в приложении I.

Полученное выражение для (2.26) является точным. Рассмотрим теперь поведение сечений в разных предельных случаях.

Вблизи порога $\frac{\mu^2}{E^2}\sim 1,\ \frac{\omega}{E}\ll 1$ тогда, разлагая до членов первого порядка по ω/E получаем:

$$d\sigma_e^{th} = \frac{\alpha^3}{3E^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\beta_0^3\left[\ln\left(\frac{2E}{m}\right)-\frac{1}{2}\right] \qquad (2.27)$$

$$d\sigma_\gamma^{th} = \frac{2\alpha^3}{9E^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\beta_0^3\left(1-\frac{\mu^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{\omega}{E}\right) \qquad (2.28)$$

вблизи порога $\beta_0\ll 1$, видно, что сечение излучения тяжёлыми частицами вблизи порога имеет дополнительную малость пропорциональную квадрату скорости этих частиц, как и должно быть, поскольку излучение тяжёлых частиц вблизи порога является дипольным.

Вдали от порога $\mu^2/E^2\ll 1$, тогда с точностью до членов первого порядка по $\frac{\mu^2}{E^2},\ \frac{\omega}{E}$ имеем:

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{3E^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\left(1-\frac{3\mu^2}{2E^2}\right)\left[\ln\left(\frac{2E}{m}\right)-\frac{1}{2}\right] \qquad (2.29)$$

$$d\sigma_\gamma = \frac{\alpha^3}{3E^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\mu^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{\omega}{E}\right)\left(\ln\left(\frac{2E}{\mu}\right)-\frac{1}{2}\right) \qquad (2.30)$$

Как мы видим, вблизи порога вклад излучения тяжёлой частицей очень мал. По мере роста энергии начальных частиц над порогом рождения вклад излучения тяжёлыми частицами растет, причём при $E\sim 2\mu$, $d\sigma_\gamma\sim 0{,}1\,d\sigma_e$. Эта ситуация аналогична той, которая возникает при рождении пары мюонов [I].

Что касается жесткой части фотонного спектра, то при $\omega\to\omega_{max}$ $\quad d\sigma_e\sim\left(\sqrt{\omega_{max}-\omega}\right)^3,\ d\sigma_\gamma\simeq\sqrt{\omega_{max}-\omega}$

§ 3. Сечение излучения при рождении пары произвольных частиц

Метод, предложенный в [I], может быть использован для вычисления сечения любого процесса, в котором электрон-позитронная пара превращается в пару частица-античастица и фотон.

Ясно, что вклады диаграмм, на которых излучают начальные электроны, могут быть вычислены таким же способом, как в [I] (см. также § 2 этой работы). Для описания вершины рождающихся частиц введём матричный элемент тока перехода $\langle p_4, p_3^+ | J_\mu | 0\rangle$. Можно показать [2], что из требований релятивистской и зарядовой инвариантности и закона сохранения тока следует, что для частиц с произвольным спином сумма по поляризациям конечных частиц может быть записана в виде:

$$X_{\mu\nu} = \sum_{пол.}\langle p_4, p_3^+|J_\mu|0\rangle\langle p_4, p_3^+|J_\nu|0\rangle^* =$$

$$= \frac{1}{4E_3E_4}\left[4\mathcal{D}_1(\Delta^2)\left(\frac{\Delta_\mu\Delta_\nu}{\Delta^2}-g_{\mu\nu}\right)-2\mathcal{D}_2(\Delta^2)\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\right] \qquad (3.1)$$

где $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ являются функциями формфакторов конечных частиц. Так, например, для пионов

$$\mathcal{D}_1 = 0\ ,\quad \mathcal{D}_2 = -\frac{|F(\Delta^2)|^2}{2} \qquad (3.2)$$

для нуклонов

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\Delta^2}{2}|\mathcal{F}_1+g\mathcal{F}_2|^2,\ \mathcal{D}_2 = |\mathcal{F}_1|^2-\frac{\Delta^2 g^2}{4\mu^2}|\mathcal{F}_2|^2 \qquad (3.3)$$

Здесь $F(\Delta^2)$, $\mathcal{F}_1(\Delta^2)$, $\mathcal{F}_2(\Delta^2)$ соответственно электромагнитные формфакторы пиона и нуклонов во временеподобной области передач импульсов. Соответствующие выражения для вектонов приведены в [2].

Если мы опять (ср. (2.7)) представим сечение в виде:

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_\gamma + d\sigma_{e\gamma} \qquad (3.4)$$

то для вычисления $d\sigma_e$ достаточно в формулу (2.9) вместо произведения $\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_{\nu'}$ подставить $4E_3E_4X_{\nu\nu'}$ (формула (3.I), причём полученный интеграл мы обозначим $\mathcal{U}_{\nu\nu'}$. Тогда в формулу (2.8) вместо $V_{\nu\nu'}$ надо подставить $\mathcal{U}_{\nu\nu'}$, равное:

$$\mathcal{U}_{\nu\nu'} = \frac{1}{\Delta^4}\int d^3p_3\,d^3p_4\,X_{\nu\nu'}\,\delta(\Delta-p_3^+-p_4) =$$

$$= -\frac{2\pi}{\Delta^4}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\left[\mathcal{D}_1 \div \frac{\mathcal{D}_2}{6}(\Delta^2-4\mu^2)\right]\left(g_{\nu\nu'}-\frac{\Delta_\nu\Delta_{\nu'}}{\Delta^2}\right). \qquad (3.5)$$

Проводя после этого вычисление интеграла (2.8), получаем дифференциальное сечение по углу вылета фотона ϑ_k:

$$\frac{d^2\sigma_e}{d(\cos\vartheta_k)\,d\omega} = \frac{\alpha^3\omega}{2E^2\beta}\,\frac{1}{\Delta^4}\left[\mathcal{D}_1 - \frac{\mathcal{D}_2}{6}(\Delta^2-4\mu^2)\right]\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\,Z \tag{3.6}$$

где Z даётся формулой (2.11), а интегральное сечение имеет вид

$$d\sigma_e = \frac{2\alpha^3}{\beta E^2}\,\frac{1}{\Delta^4}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\left[\mathcal{D}_1 - \frac{\mathcal{D}_2}{6}(\Delta^2-4\mu^2)\right]Y\,\frac{d\omega}{\omega} \tag{3.7}$$

где Y даётся формулой (2.13).

При вычислении вклада излучения родившимися частицами мы также должны учесть их структуру. При этом нужно вычислить вклад диаграмм комптоновского типа. В результате мы получим выражение, содержащее некоторое (зависящее от спина) число функций инвариантных кинематических параметров. Если родившиеся частицы пионы, то таких функций 3, если рождаются нуклоны, то их уже 12 и т.д. В настоящее время об этих функциях ничего не известно. Поэтому через эти функции можно выразить только дифференциальное сечение и этим подходом нельзя пользоваться при вычислении интегральных сечений.

С другой стороны мы можем воспользоваться разложением указанных амплитуд по степеням ω/E. Этим разложением можно вообще пользоваться в довольно широкой области над порогом, поскольку в этой области из-за скачка масс $\frac{\omega}{E} \ll 1$. Тогда интегральное сечение процесса может быть представлено в виде (см. например [3])

$$d\sigma_f = \sigma_{f0}\frac{d\omega}{\omega} + \sigma_{f1}\,d\omega + \sigma_{f2}\,\omega\,d\omega + \cdots \tag{3.8}$$

При этом легко видеть, что член $d\sigma_{f0}$ в случае аннигиляционных процессов точно даётся приближением классических токов. Действительно, по определению классические токи содержат все члены, не имеющие ω в числителе, с другой стороны, в аннигиляционных процессах при интегрировании по углам вылета конечных частиц не возникает дополнительных степеней ω (в отличие от случая излучения при рассеянии, где пределы интегрирования по углам зависят от ω, так $\Delta^2_{min} = \left(\frac{\omega m^2}{E^2}\right)^2$ и точное выражение для σ_0 не может быть получено из выражения с классическими токами (см., например, [4]).

По определению для излучения одного фотона

$$d\sigma_{cl} = \sigma_{el}\,\frac{\alpha}{4\pi^2}\int \omega\,d\omega\,d\Omega_k\left[\frac{p_1}{(p_1k)} - \frac{p_2^+}{(p_2^+k)} + \frac{p_3^+}{(p_3^+k)} - \frac{p_4}{(p_4k)}\right]^2 \tag{3.9}$$

Выполняя интегрирование по углам вылета фотона и конечных частиц, получаем

$$d\sigma_{cl}(E,\omega) = \sigma_{f0}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{\alpha^3}{E^4\beta}\sqrt{\frac{E^2-\mu^2}{E^2}}\left(1+\frac{m^2}{2E^2}\right)\left\{\mathcal{D}_1^0 - \frac{2}{3}(E^2-\mu^2)\mathcal{D}_2^0\right\}\times \times\left[\frac{2E^2-\mu^2}{4E^2}L_1^0 - \frac{1}{2}\right]\frac{d\omega}{\omega} \tag{3.10}$$

В этой формуле определенные раньше функции $\mathcal{D}$ и L_1 (см. (2.20)) и (3.2-3) взяты в точке $\omega = 0$ (тогда $\Delta^2 = 4E^2$).

Следует еще заметить, что интерференционный член $d\sigma_{ef}$ (3.4) обращается в 0, также как во всех предыдущих случаях, если амплитуду излучения электронами брать в точном виде, а амплитуду излучения конечными частицами в приближении классических токов.

§ 4. Исследование излучения конечными частицами с помощью метода Лоу

Существует общий метод вычисления первых двух членов разложения (3.8) с учетом сильного взаимодействия во всех порядках [3]. Мы рассмотрим вычисление сечения σ_{f1} на примере излучения при рождении пары пионов.

Матричный элемент для излучения фотона конечными частицами может быть получен прямо из второго члена формулы (2.1), куда вместо $\mathcal{J}_\nu$ мы подставим величину $T_{\nu\mu}e_\mu$. Последнюю мы разобьём на две части:

$$T_{\nu\mu} = T_{\nu\mu}^A + T_{\nu\mu}^B \tag{4.1}$$

По определению $T_{\nu\mu}^A$ состоит из суммы вклада всех диаграмм, на которых вершина с излучением реального фотона связана с остальной частью диаграммы одиночной пионной линией (рис.2), $T_{\nu\mu}^B$ - вклад остальных диаграмм. Заметим, что при $\omega \to 0$ расходится только величина $T_{\nu\mu}^A$, что же касается величины $T_{\nu\mu}^B$, то она остаётся конечной [3].

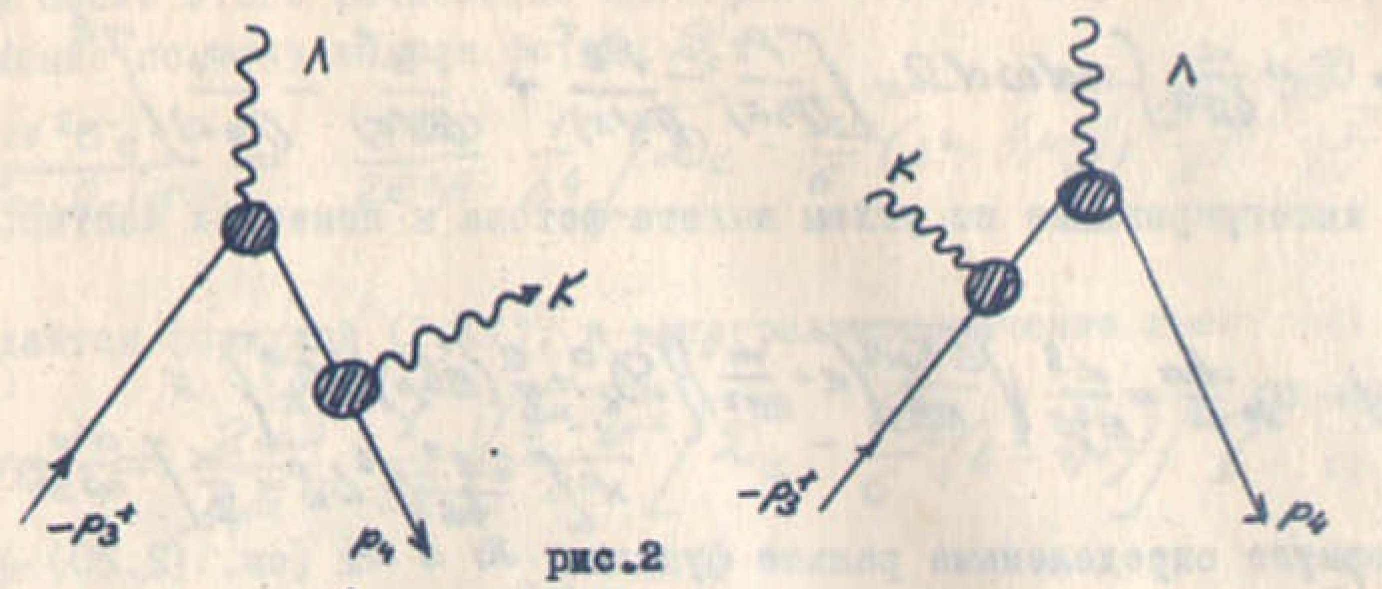

рис.2

Для $T^A_{\nu\mu}$ имеем следующее выражение:

$$T_{\nu\mu}^A = \Gamma_\nu(\Lambda^2, p_3^{+2}, (p_4+k)^2)\,\Delta(p_4+k)\,\Gamma_\mu(0, (p_4+k)^2, p_4^2) +$$
$$+ \Gamma_\mu(0, p_3^{+2}, (p_3^+ + k)^2)\,\Delta(p_3^+ + k)\,\Gamma_\nu(\Lambda^2, (p_3^+ + k)^2, p_4^2) \quad (4.2)$$

где Δ и Γ_ν - точные перенормированные функция распространения и электромагнитный вершинный оператор пиона.

Поскольку нас интересует излучение мягких фотонов, то мы будем разлагать величины в (4.2) по степеням " ω " и оставлять только первые два члена.

Воспользовавшись обобщенным тождеством Уорда, легко показать [3], что

$$T_{\nu\mu}^A = \left[\Gamma_\nu(\Lambda^2, p_3^{+2}, (p_4+k)^2)\right]\frac{p_{4\mu}}{(kp_4)} - \Gamma_\nu(\Lambda^2, (p_3^+ + k)^2, p_4^2)\frac{p^+_{3\mu}}{(p_3^+ k)} \quad (4.3)$$

Оператор Γ_ν, очевидно, может быть представлен в виде:

$$\Gamma_\nu(\Lambda^2, p_3^{+2}, (p_4+k)^2) = (p_3^+ + p_4 + k)_\nu \varphi_1 + (p_4 + k - p_3^+)_\nu \varphi_2$$
$$\Gamma_\nu(\Lambda^2, (p_3^+ + k)^2, p_4^2) = (p_3^+ + p_4 + k)_\nu \tilde{\varphi}_1 + (p_4 - k - p_3^+)_\nu \tilde{\varphi}_2 \quad (4.4)$$

где $\varphi_k, \tilde{\varphi}_k$ - скалярные функции тех же аргументов. При этом из требования калибровочной инвариантности

$$\Lambda_\nu \Gamma^\nu(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = 0 \quad (4.5)$$

имеем:

$$\varphi_1(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = \tilde{\varphi}_1(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = 0 \quad (4.6)$$

Разлагая функции $\varphi_k, \tilde{\varphi}_k$ по степеням " k " и учитывая, что

$$\varphi_2(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = \tilde{\varphi}_2(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = F(\Lambda^2) \quad (4.7)$$

есть электромагнитный формфактор пиона, получаем для $T^A_{\nu\mu}$ (4.3):

$$T_{\nu\mu}^A = \left[(p_4+k-p_3^+)_\nu \frac{p_{4\mu}}{(kp_4)} - (p_4 - p_3^+ - k)_\nu \frac{p^+_{3\mu}}{(kp_3^+)}\right] F(\Lambda^2) + 2(p_4+p_3^+)_\nu\left[p_{4\mu}(\varphi_1)_3 - p^+_{3\mu}(\tilde{\varphi}_1)_2\right] \quad (4.8)$$
$$+ 2p_{4\mu}(p_4 - p_3^+)_\nu (F)_3 - 2p^+_{3\mu}(p_4 - p_3^+)_\nu (F)_2$$

Здесь $(F)_3$ и $(F)_2$ есть производные формфактора F по соответствующему аргументу, взятые при $k=0$. Кроме того, должен выполняться закон сохранения тока:

$$k^\mu T_{\nu\mu} = k^\mu T^A_{\nu\mu} + k^\mu T^B_{\nu\mu} = 0 \quad (4.9)$$

Отсюда, учитывая, что $T^B_{\nu\mu}$ не содержит инфракрасных расходимостей, получаем:

$$T_{\nu\mu}^B = -2g_{\mu\nu}F(\Lambda^2) - 2(p_4+p_3^+)_\nu\left[p_{4\mu}(\varphi_1)_3 - p^+_{3\mu}(\tilde{\varphi}_1)_2\right] \quad (4.10)$$
$$- 2p_{4\mu}(p_4 - p_3^+)_\nu (F)_3 + 2p^+_{3\mu}(p_4 - p_3^+)_\nu (F)_2$$

Следовательно, полное выражение для $T_{\nu\mu}$ (оставлены только два первых члена разложения) есть

$$T_{\nu\mu} = \left[(p_4+k-p_3^+)_\nu \frac{p_{4\mu}}{(kp_4)} - (p_4 - p_3^+ - k)_\nu \frac{p^+_{3\mu}}{(kp_3^+)} - 2g_{\mu\nu}\right] F(\Lambda^2) \quad (4.11)$$

Видно, что производные по массам сократились, что имеет место во всех случаях [4,5]. Полученное выражение представляет матричный элемент излучения точечной частицей, умноженный на формфактор. Это соответствует известному утверждению [5-7], что первые два члена разложения амплитуды по частотам фотонов определяются полным зарядом системы и, следовательно, зависят только от формфактора. Ясно, что вычисление интегрального сечения производится так же, как и для точечных частиц. При этом сечение излучения фотона пионами (см. (2.22) с точностью до членов первого порядка по $\frac{\omega}{E}$ и в ультрарелятивистском пределе по электронам имеет вид:

$$d\sigma_\pi = \frac{\alpha^3}{24E^4}\frac{d\omega}{\omega}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}\left(1-\frac{\mu^2}{E^2}\right)\left[(\Delta^2-2\mu^2)L_1-\Delta^2\right]F(\Lambda^2) \qquad (4.12)$$

а сечение излучения фотона электронами

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{6E^2}\frac{d\omega}{\omega}\left(\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}\right)^{3/2}(L-1)\left[F(\Lambda^2)-\frac{\omega}{E}\Delta^2\frac{dF(\Lambda^2)}{d\Lambda^2}\right] \qquad (4.13)$$

а интерференционный член, как показано в конце § 2, равен нулю. Полное сечение излучения при рождении пары пионов в электрон-позитронной аннигиляции с точностью до членов первого порядка по ω/E есть:[x)]

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_\pi \qquad (4.14)$$

Как и следовало ожидать, оно выражается через электромагнитный формфактор пиона и его производную по переданному импульсу. Точно таким же способом может быть получено интегральное сечение излучения в случае рождения протон-антипротонной пары.

Авторы благодарны В.М.Галицкому за многочисленные обсуждения.

---

x) Заметим, что в широком интервале энергий $d\sigma_\pi \sim 0{,}1\, d\sigma_e$, так что основной вклад даёт сечение $d\sigma_e$, которое мы вычисляем точно. Кроме того, если $d\sigma_3$ (2.22) разложить по степеням и оставить два первых члена разложения, то это обеспечивает весьма высокую точность вплоть до $\omega/E \sim 1/2$, что следует прямо из сравнения разложения с точным результатом.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Сечение излучения точечными конечными частицами может быть вычислено с помощью следующего простого приёма. Представим $d\sigma_3$ (2.15) в виде

$$d\sigma_3 = \frac{\alpha^3}{4(2\pi)^2|F|} J_e^{\nu\nu'} R_{\nu\nu'} \frac{1}{\Lambda^4} \qquad (\Pi.1)$$

где

$$R_{\nu\nu'} = \frac{d\omega}{\omega}\int\frac{d^3p_3}{E_3}\frac{d^3p_4}{E_4}\omega^2 d\Omega_k\, \delta^4(\Lambda-p_4-p_3^+-k)\, T_{\nu\nu'} \qquad (\Pi.2)$$

может зависеть только от 4-вектора, фиксирующего систему отсчёта, в которой выбрана энергия фотона ω. Таким вектором является $n_\mu(1,0,0,0)=\frac{\Lambda_\mu}{\sqrt{\Lambda^2}}$.

Учитывая калибровочную инвариантность, имеем:

$$R_{\nu\nu'} = \frac{d\omega}{\omega} f\left[g_{\nu\nu'} - \frac{\Lambda_\nu\Lambda_{\nu'}}{\Lambda^2}\right] \qquad (\Pi.3)$$

Величина f вычисляется, как обычно, с помощью свёртки с тензором $g^{\nu\nu'}$ и равна:

$$f = \frac{16\pi^2}{3}\sqrt{\frac{\Delta^2-4\mu^2}{\Delta^2}}E^2\left\{\left[(\Delta^2-2\mu^2)L_1-\Delta^2\right]\left(1-\frac{\mu^2}{E^2}\right)+4\omega^2\right\} \qquad (\Pi.4)$$

Подставляя выражение (П.3) в (П.I), получаем формулу (2.22)

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Байер, В.А.Хозе ЖЭТФ, 48, вып.3, 1965
2. В.Н.Байер, В.С.Фадин ДАН СССР, 161, 1965
3. F.Low.Phys.Rev.110,974,1958.
4. В.Н.Байер, В.М.Галицкий.Phys.Let.13 . 355, 1964
5. С.М.Биленький, Р.М.Рындин. ЖЭТФ 40, 819, 1961
6. F.Low.Phys.Rev.96,1428,1954.
7. M.Gell-Mann,M.Goldberger.Phys.Rev.96,1433,1954.